

# Computing Deflections Using ACI CODE-318-19 and Beyond, Part 4

## Deflection example—continuous slab

by Peter H. Bischoff

This is the fourth in a five-part article series that addresses the calculation of deflection using a new expression for the effective moment of inertia  $I_e$  introduced into ACI CODE-318-19.<sup>1</sup> The deflection example in Part 4 follows the steps taken for computing the deflection of reinforced (nonprestressed) concrete using the procedure outlined in Part 1 of this article series.<sup>2</sup>

Deflection is computed for a one-way slab with both ends continuous. Calculations would typically not use more than two or three significant figures for design, but this restriction is relaxed in the following example to facilitate review by the reader. The detailed nature of the deflection calculations suggests a level of accuracy that is not possible because of the inherent variability in deflections, together with the simplifications and approximations made in the calculation process.<sup>3</sup> Hence, calculated deflections should be considered as representative values for comparison with deflection limits used to provide an indication of satisfactory performance.

### Example Details

Deflections are computed for an interior span of a continuous 7.5 in. thick, one-way slab as shown in Fig. 1. The slab has a span  $\ell = 20$  ft between the support centerlines and a clear span  $\ell_n = 18$  ft 8 in. between the supporting beam faces,

assuming a beam width of 16 in. The 7.5 in. slab thickness is less than the minimum thickness  $h_{min} = \ell/28 = 20 \times 12/28 = 8.6$  in. Hence, deflections are computed. The effective depth  $d$  of the reinforcing steel equals 6.5 in. for No. 4 reinforcing bars with a concrete cover of  $3/4$  in. Slab loads are itemized in Table 1, with 20% of the live load assumed sustained. The dead-to-live load ratio is about 2.5 for this example.

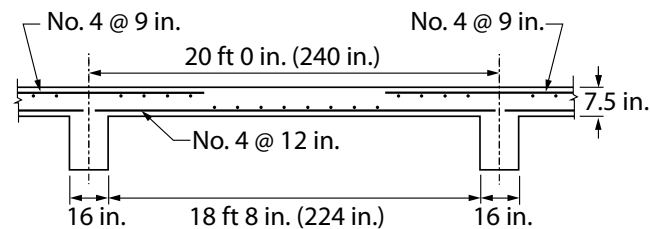


Fig. 1: Elevation view of continuous one-way slab example with reinforcing details

Table 1:  
Slab example loads

|                                                                 |        |
|-----------------------------------------------------------------|--------|
| Self-weight, lb/ft <sup>2</sup>                                 | 93.75  |
| Additional dead load (including partitions), lb/ft <sup>2</sup> | 32     |
| Total dead load $q_D$ , lb/ft <sup>2</sup>                      | 125.75 |
| Live load $q_L$ (20% sustained), lb/ft <sup>2</sup>             | 50     |
| Sustained load $q_{sus}$ , lb/ft <sup>2</sup>                   | 135.75 |
| $q_o = q_D + q_L$ , lb/ft <sup>2</sup>                          | 175.75 |

### Summary of Article Parts

- Part 1: Primer for Computing Deflections—Immediate and Time-Dependent
- Part 2: New Expression for  $I_e$  and Reasons for Change
- Part 3: Impact of Changes Made
- Part 4: Deflection Example—Continuous Slab
- Part 5: Proposed Extension to Prestressed Concrete

Reinforcement is selected to satisfy ACI CODE-318 reinforcement limits and strength requirements using the ACI CODE-318 approximate support and midspan moments summarized in Table 2. Number 4 bars with a bar area  $A_b = 0.20 \text{ in.}^2$  are placed at 12 in. on center for the bottom reinforcement to give a reinforcement ratio  $\rho = 0.256\%$  at midspan. Number 4 bars placed at 9 in. on center over the supports give  $\rho = 0.342\%$  for the top reinforcement. Section properties for the uncracked and cracked sections ( $I_g$ ,  $M_{cr}$ ,  $I_{cr}$ , and  $I_e$ ) and member properties ( $I_{e,D}$  and  $I_{e,D+L}$ ) are also provided in Table 2. Calculated values of deflection summarized in Table 3 are useful for following the detailed calculation process. The concrete has a specified compressive strength  $f'_c = 5000 \text{ psi}$ , giving  $E_c = 57,000 \sqrt{5000} = 4030 \text{ ksi}$  and a rupture modulus  $f_r = 7.5 \sqrt{5000} = 530 \text{ psi}$ . Grade 60 reinforcing steel is used with  $f_y = 60 \text{ ksi}$  and  $E_s = 29,000 \text{ ksi}$ .

**Table 2:**  
Slab example moments, deflection factor  $K$ , and section properties

| Approximate moment                             | Left support face                             | Midspan              | Right support face |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------|--------------------|
|                                                | $w\ell_n^2/11$                                | $w\ell_n^2/16$       | $w\ell_n^2/11$     |
| $M_D$ , kip-ft/ft                              | 3.98                                          | 2.74                 | 3.98               |
| $M_L$ , kip-ft/ft                              | 1.59                                          | 1.09                 | 1.59               |
| $M_o = M_D + M_L$ , kip-ft/ft                  | 5.57                                          | 3.83                 | 5.57               |
| $M_o = w\ell_n^2/8$ , kip-ft/ft                | 7.66                                          |                      |                    |
| $K = 1.2 - 0.2M_o/M_D$                         | 0.80                                          |                      |                    |
| $I_g$ , in. <sup>4</sup> /ft                   | 421.9                                         | 421.9                | 421.9              |
| $I_{cr}$ , in. <sup>4</sup> /ft                | 60.7                                          | 47.3                 | 60.7               |
| $M_{cr}$ , kip-ft/ft                           | 4.97                                          | 4.97                 | 4.97               |
| Dead load moment $M_D$                         |                                               |                      |                    |
| $(2/3)M_{cr}/M_D$                              | 0.832<br>(cracked)                            | 1.208<br>(uncracked) | 0.832<br>(cracked) |
| $I_e$ for $M_D$ , in. <sup>4</sup> /ft         | 149.0                                         | 421.9                | 149.0              |
| $I_{e,D} = I_{e,m}$ , in. <sup>4</sup> /ft     | 421.9                                         |                      |                    |
| $I_{e,D} = I_{e,avg}$ , in. <sup>4</sup> /ft   | $0.7 \times 421.9 + 0.3 \times 149.0 = 340.0$ |                      |                    |
| Full service load moment $M_o = M_{D+L}$       |                                               |                      |                    |
| $(2/3)M_{cr}/M_o$                              | 0.594<br>(cracked)                            | 0.864<br>(cracked)   | 0.594<br>(cracked) |
| $I_e$ for $M_D + M_L$ , in. <sup>4</sup> /ft   | 87.0                                          | 140.4                | 87.0               |
| $I_{e,D+L} = I_{e,m}$ , in. <sup>4</sup> /ft   | 140.4                                         |                      |                    |
| $I_{e,D+L} = I_{e,avg}$ , in. <sup>4</sup> /ft | $0.7 \times 140.4 + 0.3 \times 87.0 = 124.4$  |                      |                    |

Immediate deflection from live load checked against the  $\ell/360$  deflection limit assumes first-time loading, while incremental deflection calculations checked against the  $\ell/240$  deflection limit account for preloading. Time-dependent deflections assume load is sustained for 5 years or more, giving  $\lambda_\Delta = 2.0$  (assuming no compression steel and no delay in installation of the attached nonstructural elements).

## Immediate Deflection from Live Load (No Preload)

Check for cracking with

$$(2/3)M_{cr} = \frac{2}{3} \times \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{2}{3} \times \frac{530 \times 421.9}{3.75 \times 12 \times 1000} = \frac{2}{3} \times 4.97 = 3.31 \text{ kip}\cdot\text{ft/ft}$$

### (a) Short-term deflection from dead load (with no preloading):

The slab is uncracked at midspan with  $M_D = 2.74 < 3.31$  kip-ft/ft and  $I_e = I_g = 421.9 \text{ in.}^4/\text{ft}$ .

The slab is cracked at the supports with  $M_D = 3.98 > 3.31$  kip-ft/ft and  $(2/3)M_{cr}/M_D = 0.832$ . Calculation of  $I_e$  at the supports is required. Using the section properties from Table 2 gives

**Table 3:**  
Summary of calculated deflections using ACI CODE-318 approximate moments

|                                                                      | No preload                    | Preload                         |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| $M_D$ at midspan, kip-ft/ft                                          | 2.74                          | 2.74                            |
| $K$                                                                  | 0.80                          | 0.80                            |
| $I_{e,D}$ or $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft                      | 421.9 (340.0) using $I_{e,D}$ | 140.4 (124.4) using $I_{e,D+L}$ |
| $\Delta_{i,D}$ , in.                                                 | 0.081 (0.100)                 | 0.243 (0.274)                   |
| $M_{D+L}$ at midspan, kip-ft/ft                                      | 3.83                          | 3.83                            |
| $K$                                                                  | 0.80                          | 0.80                            |
| $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft                                   | 140.4 (124.4)                 | 140.4 (124.4)                   |
| $\Delta_{i,D+L}$ , in.                                               | 0.340 (0.384)                 | 0.340 (0.384)                   |
| $\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D}$ , in.                 | 0.259 (0.284)                 | 0.097 (0.110)                   |
| $\Delta_{i,sus} = \Delta_{i,D} + \Delta_{i,L(sus)}$ , in.            | 0.133 (0.157)                 | 0.2624 (0.296)                  |
| $\Delta_{i,nc} = \lambda_\Delta \Delta_{i,sus} + \Delta_{i,L}$ , in. | 0.525 (0.598)                 | 0.622 (0.702)                   |

Note: Deflection values are based on using  $I_{e,m}$  for  $I_{e,D}$  and  $I_{e,D+L}$ , except for values in parentheses, which use  $I_{e,avg}$  for  $I_{e,D}$  and  $I_{e,D+L}$ .

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left( \frac{(2/3)M_{cr}}{M_D} \right)^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} = \frac{60.7}{1 - (0.832)^2 \left( 1 - \frac{60.7}{421.9} \right)} =$$

149.0 in.<sup>4</sup>/ft at the supports.

Using  $I_e$  at midspan for the slab deflection calculation gives  $I_{e,D} = I_{e,m} = 421.9$  in.<sup>4</sup>/ft, and the immediate deflection from dead load  $\Delta_{i,D}$  is calculated as follows (using a deflection coefficient  $K = 0.8$ )

$$\Delta_{i,D} = K \frac{5}{48} \frac{M_D \ell_n^2}{E_c I_{e,D}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{2.74 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 421.9} = 0.081 \text{ in.}$$

An alternative scenario explored later in this example assumes a support moment equal to  $w\ell_n^2/12$  and midspan moment of  $w\ell_n^2/24$  for the uniform dead load.

#### (b) Short-term deflection for dead plus live load:

The slab is cracked at midspan with  $M_{D+L} = 3.83 > (2/3)M_{cr} = 3.31$  kip·ft/ft, and it is cracked at the supports with  $M_{D+L} = 5.57 > 3.31$  kip·ft/ft. This gives  $(2/3)M_{cr}/M_{D+L}$  equal to 0.864 at midspan and 0.594 at the supports.

Calculation of  $I_e$  provides a value of 140.4 in.<sup>4</sup>/ft at midspan and 87.0 in.<sup>4</sup>/ft at the supports (Table 2). Using  $I_e$  at midspan for the slab gives  $I_{e,D+L} = I_{e,m} = 140.4$  in.<sup>4</sup>/ft, with the immediate deflection from dead plus live load  $\Delta_{i,D+L}$  calculated as follows

$$\Delta_{i,D+L} = K \frac{5}{48} \frac{M_a \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{3.83 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.340 \text{ in.}$$

#### (c) Short-term (immediate) deflection from live load:

The immediate deflection from live load  $\Delta_{i,L}$  (assuming no preloading) is then

$$\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D} = 0.340 - 0.081 = 0.259 \text{ in.} \leq \frac{\ell}{360} = \frac{240}{360} = 0.667 \text{ in., therefore it's OK.}$$

Using an averaged value of  $I_e$  for the slab with  $I_{e,avg} = 0.7I_{e,m} + 0.15I_{e1} + 0.15I_{e2}$  gives 340.0 in.<sup>4</sup>/ft for  $I_{e,D}$  and 124.4 in.<sup>4</sup>/ft for  $I_{e,D+L}$ . The corresponding calculation of immediate deflection from live load (with no preloading) is then  $\Delta_{i,L} = 0.384 - 0.100 = 0.284$  in. (for a 10% increase in the calculated deflection compared to the value of 0.259 in. using  $I_e$  at midspan).

### Incremental Deflection (With Preload)

The slab is cracked at both midspan and the supports for the full dead plus live load moment, as observed from the live load deflection calculations, where  $I_e = 140.4$  in.<sup>4</sup>/ft at midspan and  $I_e = 87.0$  in.<sup>4</sup>/ft at the supports. Using  $I_{e,D+L} = I_{e,m} = 140.4$  in.<sup>4</sup>/ft and assuming preloading, we get

$$\Delta_{i,D} = K \frac{5}{48} \frac{M_D \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{2.74 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.243 \text{ in.}$$

$$\Delta_{i,L} = K \frac{5}{48} \frac{M_L \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{1.09 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.097 \text{ in.}$$

$$(\text{or } \Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D} = 0.340 - 0.243 = 0.097 \text{ in.})$$

The value of  $\Delta_{i,D}$  with preload is three times the deflection value calculated for first-time loading (increasing from 0.081 in. without preload to 0.243 in. with preload when using  $I_e$  at midspan). Conversely,  $\Delta_{i,L}$  with preload is not much more than one-third the calculated value with no preloading (decreasing from 0.259 in. without preloading to 0.097 in. with preload when using  $I_e$  at midspan). For 20% of the live load sustained

$$\Delta_{i,sus} = \Delta_{i,D} + 0.2\Delta_{i,L} = 0.243 + 0.2 \times 0.097 = 0.2624 \text{ in.}$$

and

$$\Delta_{inc} = \lambda_{\Delta} \Delta_{i,sus} + \Delta_{i,L} = 2.0 \times 0.2624 + 0.097 = 0.622 \text{ in.} \leq \frac{\ell}{240} = \frac{240}{240} = 1.0 \text{ in., therefore it's OK.}$$

Compare this with  $\Delta_{inc} = 0.525$  in. when there is no preloading.

Using  $I_{e,D+L} = I_{e,avg} = 124.4$  in.<sup>4</sup>/ft (with preloading) gives  $\Delta_{inc} = 2.0 \times 0.296 + 0.110 = 0.702$  in. (for a 13% increase in deflection that still satisfies the  $\ell/240$  deflection limit).

### Alternative Scenario for Dead Load

An alternative (and perhaps more realistic) scenario explored for deflection from dead load considers the moments arising for a uniformly distributed dead load acting on all spans. Assumptions made regarding the midspan and support moments for the dead load are evaluated for the calculation of deflections.

Approximating the support moments for an interior span, assuming the supports are fully fixed at each end, gives a negative support moment  $M_D$  of  $w\ell_n^2/12 = 3.65$  kip·ft/ft, positive midspan moment  $M_D$  of  $w\ell_n^2/24 = 1.83$  kip·ft/ft, and deflection coefficient  $K = 0.60$ . The slab is cracked at the supports with  $(2/3)M_{cr}/M_D = 0.907$  and a corresponding value of  $I_e = 205.3$  in.<sup>4</sup>/ft, while the slab is uncracked at midspan with  $I_e = 421.9$  in.<sup>4</sup>/ft. Moments for the full dead plus live load and corresponding values of  $I_e$  do not change.

Calculated deflections are summarized in Table 4 for this scenario, giving  $\Delta_{i,L} = 0.300$  in. assuming no preload (when using  $I_{e,m}$ ) and  $\Delta_{inc} = 0.550$  in. with preload (when using  $I_{e,m}$ ). Comparison with Table 3 shows that deflections from dead load are reduced by 50% (either with or without preload), which leads to an increase in deflections from live load of about 16% for the worst case with no preload and more than double the deflection from live load with preload. Live load deflection for no preload still gives a deflection greater than the value with preload. Incremental deflections decrease by about 12% with preload and 5% for no preload. Using the

**Table 4:**  
Summary of calculated deflections using alternative scenario for dead load

|                                                                        | No preload                       | Preload                            |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| $M_D$ at midspan, kip-ft/ft                                            | 1.83                             | 1.83                               |
| $K$                                                                    | 0.60                             | 0.60                               |
| $I_{e,D}$ or $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft                        | 421.9 (356.9)<br>using $I_{e,D}$ | 140.4 (124.4)<br>using $I_{e,D+L}$ |
| $\Delta_{i,D}$ , in.                                                   | 0.0405 (0.048)                   | 0.122 (0.137)                      |
| $M_{D+L}$ at midspan, kip-ft/ft                                        | 3.83                             | 3.83                               |
| $K$                                                                    | 0.80                             | 0.80                               |
| $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft                                     | 140.4 (124.4)                    | 140.4 (124.4)                      |
| $\Delta_{i,D+L}$ , in.                                                 | 0.340 (0.384)                    | 0.340 (0.384)                      |
| $\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D}$ , in.                   | 0.300 (0.336)                    | 0.218 (0.247)                      |
| $\Delta_{i,SUS} = \Delta_{i,D} + \Delta_{i,L(SUS)}$ , in.              | 0.1005 (0.115)                   | 0.166 (0.1864)                     |
| $\Delta_{i,RC} = \lambda_{\Delta} \Delta_{i,SUS} + \Delta_{i,L}$ , in. | 0.501 (0.566)                    | 0.550 (0.620)                      |

Note: Deflection values are based on using  $I_{e,m}$  for  $I_{e,D}$  and  $I_{e,D+L}$ , except for values in parentheses, which use  $I_{e,avg}$  for  $I_{e,D}$  and  $I_{e,D+L}$ .

span between support centerlines in the deflection calculations (instead of the clear span) would increase deflection by 15% for this example.

## Summary

The calculated value of immediate deflection from live load (with no preload) equals about 40% of the  $\ell/360$  deflection limit for this example, while the incremental deflection (with preload) equals between 62 and 70% of the  $\ell/240$  deflection limit, depending on whether  $I_e$  is taken at midspan or as an average. Calculated deflections increased by about 10 to 14% using a weighted average of  $I_e$  for the member compared to using  $I_e$  at midspan. Using a weighted average of  $I_e$  gives a more flexible response (with more deflection) when  $I_e$  at midspan is greater than  $I_e$  at the supports, as with this example.

The alternative scenario assumed for the dead load moments (used to compute deflection for a uniformly distributed dead load acting on all spans) demonstrates the extent to which assumptions made regarding the moments in a continuous (statically indeterminate) member can affect the computed values of deflection. Immediate deflection from live load (for no preload) increased by 16%, while incremental deflection (with preload) decreased by 12%. Hence, assumptions made in this example regarding the support and midspan moments for dead load affected the calculated values of live load deflection and incremental deflection by about  $\pm 15\%$ .

## References

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-19)," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2019, 624 pp.

2. Bischoff, P.H., "Computing Deflections Using ACI CODE-318-19 and Beyond, Part 1," *Concrete International*, V. 47, No. 2, Feb. 2025, pp. 47-50.

3. ACI Committee 435, "Report on Deflection of Nonprestressed Concrete Structures (ACI PRC-435-20)," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2020, 56 pp.

Selected for reader interest by the editors.



**Peter H. Bischoff, FACI**, is an Honorary Research Professor in the Department of Civil Engineering at the University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada. He is a member of ACI Committees 224, Cracking; 435, Deflection of Concrete Building Structures; 440, Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement; and 440C, FRP Reinforced Concrete Building Code. He received the 2014 ACI Design Award and the 2020 ASCE T.Y. Lin Award for an *ACI Structural Journal* paper related to deflection of prestressed concrete. His research interests include the serviceability behavior of concrete structures.

## Stay Up-to-Date with the ACI Concrete Industry Calendar!

Search your Events Calendar by...



Certifications and Training



Seminars and Webinars



Events

**Search, Click, Connect!**

Visit the Events Calendar page at [www.concrete.org/calendar](http://www.concrete.org/calendar)

Whether you're interested in networking with industry leaders, learning a new technology, or wanting to let others know about your upcoming event, be sure to check out the ACI Events Calendar. With just a few clicks, you can connect with an event near you or post your own event to share with the world!



American Concrete Institute  
*Always advancing*

## Más allá del Cálculo de las deflexiones con ACI 318-19, Parte 4

Ejemplo de cálculo de deflexiones - Losa Continua

Por Peter H. Bischoff

Este es la cuarta parte de una serie de cinco artículos que trata sobre el cálculo de deflexiones utilizando la nueva expresión para el momento de inercia efectivo  $I_e$  introducida en el ACI 318-19<sup>1</sup>. El ejemplo de cálculo de deflexiones en esta parte 4 describe los pasos que se requieren para calcular la deflexión de concreto reforzado (no pretensado) utilizando el procedimiento resumido en la Parte 1 de esta serie de artículos<sup>2</sup>.

Se calculan las deflexiones para losas en una dirección con ambos extremos continuos. En la práctica, los cálculos para el diseño no tendrían más de dos o tres cifras significativas pero esta restricción es relajada en el ejemplo siguiente, para facilitar la revisión de los cálculos por el lector. La naturaleza detallada y las cifras significativas de los cálculos de las deflexiones en este artículo podrían sugerir un nivel de precisión que no es posible en la realidad debido a la inherente variabilidad de las deflexiones, junto con las simplificaciones y aproximaciones que se realizan en el proceso de cálculo<sup>3</sup>. Las deflexiones calculadas solo deberían considerarse valores representativos con fines de su comparación con los límites de deflexión reglamentarios que constituyen los indicadores de un comportamiento satisfactorio.

### Resumen de las Partes del Artículo

Parte 1: Introducción al cálculo de deflexiones – Inmediatas y dependientes del tiempo

Parte 2: Nueva expresión para  $l_e$  y razones para el cambio

Parte 3: Impacto del cambio

Parte 4: Ejemplo de cálculo de deflexiones – Losa continua en una dirección

Parte 5: Extensión propuesta para concreto pretensado

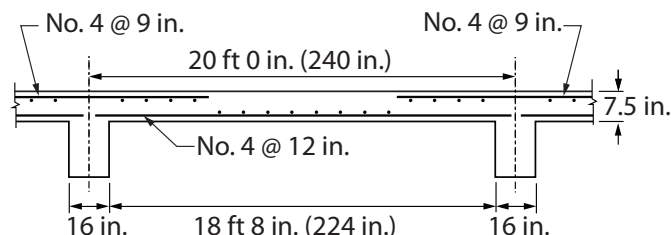


Fig.1: Losa continua en una dirección con los detalles del refuerzo

## Ejemplo detallado

Las deflexiones son calculadas para el vano interno de la losa en una dirección continua de 7.5 in (19 cm) de espesor mostrada en la Fig. 1. La losa tiene una longitud  $\ell = 20$  ft (6 m) entre centros de apoyo y una luz libre  $\ell_n = 18$  ft 8 in. (5.7 m) entre las caras de las vigas de apoyo asumiendo un ancho de viga de 16 in (40 cm). El espesor de la losa de 7.5 in (19 cm) es menor que el espesor mínimo  $h_{min} = \ell / 28 = 20 \times 12 / 28 = 8.6$  in (22 cm). Por lo tanto, las deflexiones deben ser calculadas. La altura útil,  $d$ , del acero de refuerzo es igual a 6.5 in (16.5 cm) para barras de refuerzo No.4 (12.7 mm) con un recubrimiento de concreto de  $\frac{3}{4}$  in (19 mm). Las cargas sobre la losa se describen en la Tabla 1, con 20% de la sobrecarga considerada sostenida. La relación carga permanente/sobrecarga es aproximadamente 2.5 en este ejemplo.

Tabla 1:  
Cargas sobre la losa del ejemplo

|                                                                         |        |
|-------------------------------------------------------------------------|--------|
| Peso propio, lb/ft <sup>2</sup>                                         | 93.75  |
| Carga permanente adicional (incluyendo particiones), lb/ft <sup>2</sup> | 32     |
| Carga permanente total $q_D$ , lb/ft <sup>2</sup>                       | 125.75 |
| Sobrecarga $q_L$ (20% sostenida), lb/ft <sup>2</sup>                    | 50     |
| Carga sostenida, $q_{sus}$ , lb/ft <sup>2</sup>                         | 135.75 |
| $q_o = q_D + q_L$ , lb/ft <sup>2</sup>                                  | 175.75 |

El refuerzo es diseñado para satisfacer la cuantía mínima del ACI-318 y los requerimientos de resistencia calculados a partir de los momentos flectores en los apoyos y en el vano según ACI 318 (resumidos en la Tabla 2). Barras No. 4 (12.7 mm) con un área de la barra  $A_b = 0.20$  in<sup>2</sup> (1.29 cm<sup>2</sup>) se colocan a una distancia centro a centro de 12 in (30 cm) para el refuerzo de la parte inferior de la losa, correspondiente a una cuantía  $\rho = 0.256\%$  en el centro del vano. En los apoyos se colocan barras No.

4 (12.7 mm) a una distancia centro a centro de 9 in (23 cm), obteniéndose una cuantía  $\rho=0.342\%$  para el refuerzo en la parte superior. Las propiedades de la secciones fisuradas y no fisuradas ( $I_g, M_{cr}, I_{cr}, I_e$ ) y las propiedades de la losa ( $I_{e,D}, I_{e,D+L}$ ) se muestran también en la Tabla 2. Los valores calculados de las deflexiones se resumen en la Tabla 3 y son útiles para el seguimiento detallado del proceso de cálculo. El concreto tiene una resistencia a la compresión especificada  $f'_c=5,000$  psi (34.5 MPa), de donde se obtiene  $E_c=57,000 \sqrt{5,000}=4,030$  ksi (27,790 MPa) y un módulo de ruptura  $f_r=7.5 \sqrt{5,000}=530$  psi (3.65 MPa). Se utiliza acero de refuerzo Grado 60 con  $f_y=60$  ksi (414 MPa) y  $E_s=29,000$  ksi (200,000 MPa).

La deflexión inmediata debida a la sobrecarga se verifica contra el límite de  $\ell/360$  asumiendo el estado de fisuración de la primera carga (sin precarga), en tanto que la deflexión incremental se verifica contra el límite de  $\ell/240$  teniendo en cuenta la precarga. La deflexión dependiente del tiempo asume que la carga sostenida dura 5 años o más, de donde se obtiene un factor  $\lambda_\Delta=2.0$  (asumiendo que no existe refuerzo de compresión y que no existe un tiempo de espera hasta la instalación de los elementos no estructurales).

## Deflexión inmediata debida a la sobrecarga (sin precarga)

La fisuración se verifica con

$$(2/3)M_{cr} = \frac{2}{3} \times \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{2}{3} \times \frac{530 \times 421.9}{3.75 \times 12 \times 1000} = \frac{2}{3} \times 4.97 = 3.31 \text{ kip}\cdot\text{ft}/\text{ft}$$

### (a) Deflexión de corto plazo debida al peso propio (sin precarga)

La losa no está fisurada en el centro del vano, siendo  $M_D=2.74$  (12.2 kN)<3.31 kip·ft/ft (14.7 kN) y  $I_e = 421.9 \text{ in}^4/\text{ft}$  (57,610  $\text{cm}^4/\text{m}$ ).

La losa se fisura en los apoyos, siendo  $M_D=3.98$  (17.7 kN)>3.31 kip·ft/ft (14.7 kN) y  $(2/3) M_{cr}/M_D = 0.832$ . Por lo tanto, se requiere el cálculo de  $I_e$  en los apoyos. Utilizando las propiedades de la sección de la Tabla 2 se obtiene

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left( \frac{(2/3)M_{cr}}{M_D} \right)^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} = \frac{60.7}{1 - (0.832)^2 \left( 1 - \frac{60.7}{421.9} \right)} = 149.0 \text{ in}^4/\text{ft} \text{ (20,350 cm}^4/\text{m) en los soportes}$$

Utilizando  $I_e$  en la mitad del vano para el cálculo de la deflexión de la losa se obtiene  $I_{(e,D)} = I_{(e,m)} = 421.9 \text{ in}^4/\text{ft}$  (57,610  $\text{cm}^4/\text{m}$ ) y la deflexión inmediata por peso propio  $\Delta_{i,D}$  se calcula con la ecuación siguiente (utilizando un coeficiente de deflexión  $K=0.8$ )

**Tabla 2:**  
Momentos, factor de deflexión  $K$  y propiedades de la sección de la losa del ejemplo

| Momentos aproximados                                                 | Cara del apoyo izquierdo                      | Mitad del vano   | Cara del apoyo derecho |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------|------------------------|
|                                                                      | $w\ell_n^2/11$                                | $w\ell_n^2/16$   | $w\ell_n^2/11$         |
| $M_D$ , kip·ft/ft                                                    | 3.98                                          | 2.74             | 3.98                   |
| $M_L$ , kip·ft/ft                                                    | 1.59                                          | 1.09             | 1.59                   |
| $M_o = M_D + M_L$ , kip·ft/ft                                        | 5.57                                          | 3.83             | 5.57                   |
| $M_o = w\ell_n^2/8$ , kip·ft/ft                                      | 7.66                                          |                  |                        |
| $K = 1.2 - 0.2M_o/M_o$                                               | 0.80                                          |                  |                        |
| $I_g$ , in. <sup>4</sup> /ft                                         | 421.9                                         | 421.9            | 421.9                  |
| $I_{cr}$ , in. <sup>4</sup> /ft                                      | 60.7                                          | 47.3             | 60.7                   |
| $M_{cr}$ , kip·ft/ft                                                 | 4.97                                          | 4.97             | 4.97                   |
| <b>Momento de peso propio <math>M_D</math></b>                       |                                               |                  |                        |
| $(2/3)M_{cr}/M_D$                                                    | 0.832 (fisurada)                              | 1.208 (fisurada) | 0.832 (fisurada)       |
| $I_e$ for $M_D$ , in. <sup>4</sup> /ft                               | 149.0                                         | 421.9            | 149.0                  |
| $I_{e,D} = I_{e,m}$ , in. <sup>4</sup> /ft                           | 421.9                                         |                  |                        |
| $I_{e,D} = I_{e,avg}$ , in. <sup>4</sup> /ft                         | $0.7 \times 421.9 + 0.3 \times 149.0 = 340.0$ |                  |                        |
| <b>Momento de carga de servicio total <math>M_o = M_{D+L}</math></b> |                                               |                  |                        |
| $(2/3)M_{cr}/M_o$                                                    | 0.594 (fisurada)                              | 0.864 (fisurada) | 0.594 (fisurada)       |
| $I_e$ for $M_D + M_L$ , in. <sup>4</sup> /ft                         | 87.0                                          | 140.4            | 87.0                   |
| $I_{e,D+L} = I_{e,m}$ , in. <sup>4</sup> /ft                         | 140.4                                         |                  |                        |
| $I_{e,D+L} = I_{e,avg}$ , in. <sup>4</sup> /ft                       | $0.7 \times 140.4 + 0.3 \times 87.0 = 124.4$  |                  |                        |

$$\Delta_{i,D} = K \frac{5}{48} \frac{M_D \ell_n^2}{E_c I_{e,D}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{2.74 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 421.9} = 0.081 \text{ (0.206 cm)}$$

Un escenario alternativo que se explora más adelante en este ejemplo considera un momento en el apoyo igual a  $w(\ell_n^2)/12$  y un momento en la mitad del vano igual a  $w(\ell_n^2)/24$  correspondientes a una carga uniformemente distribuida de peso propio en todos los vanos.

### (b) Deflexión de corto plazo debida al peso propio más sobrecarga

La losa está fisurada en el centro del vano con  $M_{D+L}=3.83$  (17kN)> $(2/3) M_{cr}=3.31$  kip·ft/ft(14.7 kN) y también está fisurada en los apoyos con  $M_{D+L}=5.57$  (24.8 kN)>3.31 kip·ft/ft(14.7 kN). De donde resulta,  $(2/3) M_{cr}/M_{D+L}$  igual a 0.864 en la mitad del vano y 0.594 en los apoyos.

Calculando  $I_e$  se obtiene un valor de 140.4 in<sup>4</sup>/ft (19,170 cm<sup>4</sup>/m) en el centro del vano y 87.0 in<sup>4</sup>/ft (11,880 cm<sup>4</sup>/m) en los apoyos (Tabla 2). Utilizando la  $I_e$  del centro del vano para la losa, se obtiene  $I_{e,D+L} = I_{e,m} = 140 \text{ in}^4/\text{ft}$  (19,170 cm<sup>4</sup>/m) y la deflexión inmediata debida al peso propio más sobrecarga  $\Delta_{i,D+L}$  se calcula como

$$\Delta_{i,D+L} = K \frac{5}{48} \frac{M_a \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{3.83 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.340 \text{ in.} \quad (0.864 \text{ cm})$$

### (c) Deflexión de corto plazo (inmediata) debida a la sobrecarga

Por lo tanto, la deflexión inmediata debida a la sobrecarga,  $\Delta_{i,L}$ , (sin considerar precarga) se verifica mediante

$$\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D} = 0.340 - 0.081 = 0.259 \text{ in.} \leq \frac{\ell}{360} = \frac{240}{360} = 0.667 \text{ in.} \quad (1.694 \text{ cm}) \text{ y por lo tanto verifica.}$$

**Tabla 3:**  
**Resumen de las deflexiones calculadas usando los momentos aproximados del ACI 318**

|                                                                                                                                                | Sin precarga                                                         | Con precarga                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $M_D$ en el centro del vano, kip-ft/ft                                                                                                         | 2.74                                                                 | 2.74                                                                     |
| $M_D$ en el centro del vano, kN-m/m                                                                                                            | 12.2                                                                 | 12.2                                                                     |
| $K$                                                                                                                                            | 0.80                                                                 | 0.80                                                                     |
| $I_{e,D}$ or $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft<br>$I_{e,D}$ or $I_{e,D+L}$ , cm. <sup>4</sup> /m                                              | 421.9 (340.0)<br>para $I_{e,D}$<br>57,610 (46,430)<br>para $I_{e,D}$ | 140.4 (124.4)<br>para $I_{e,D+L}$<br>19,170 (16,990)<br>para $I_{e,D+L}$ |
| $\Delta_{i,D}$ , in.<br>$\Delta_{i,D}$ , cm.                                                                                                   | 0.081 (0.100)<br>0.206 (0.254)                                       | 0.243 (0.274)<br>0.617 (0.696)                                           |
| $M_{D+L}$ en el centro del vano, kip-ft/ft                                                                                                     | 3.83                                                                 | 3.83                                                                     |
| $M_{D+L}$ en el centro del vano, kN-m/m                                                                                                        | 17.0                                                                 | 17.0                                                                     |
| $K$                                                                                                                                            | 0.80                                                                 | 0.80                                                                     |
| $I_{e,D+L}$ , in. <sup>4</sup> /ft<br>$I_{e,D+L}$ , cm. <sup>4</sup> /m                                                                        | 140.4 (124.4)<br>19,170 (16,990)                                     | 140.4 (124.4)<br>19,170 (16,990)                                         |
| $\Delta_{i,D+L}$ , in.<br>$\Delta_{i,D+L}$ , cm.                                                                                               | 0.340 (0.384)<br>0.864 (0.925)                                       | 0.340 (0.384)<br>0.864 (0.925)                                           |
| $\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D}$ , in.<br>$\Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D}$ , cm.                                   | 0.259 (0.284)<br>0.658 (0.721)                                       | 0.097 (0.110)<br>0.246 (0.279)                                           |
| $\Delta_{i,sus} = \Delta_{i,D} + \Delta_{i,L(sus)}$ , in.<br>$\Delta_{i,sus} = \Delta_{i,D} + \Delta_{i,L(sus)}$ , cm.                         | 0.133 (0.157)<br>0.338 (0.399)                                       | 0.2624 (0.296)<br>0.666 (0.752)                                          |
| $\Delta_{inc} = \lambda_{\Delta} \Delta_{i,sus} + \Delta_{i,L}$ , in.<br>$\Delta_{inc} = \lambda_{\Delta} \Delta_{i,sus} + \Delta_{i,L}$ , cm. | 0.525 (0.598)<br>1.334 (1.519)                                       | 0.622 (0.702)<br>1.58 (1.783)                                            |

Nota: Los valores de las deflexiones se basan en la utilización de  $I_{e,m}$  para  $I_{e,D}$  y  $I_{e,D+L}$  excepto para los valores entre paréntesis, los cuales utilizan  $I_{e,avg}$  para  $I_{e,D}$  y  $I_{e,D+L}$ .

Utilizando un valor promedio de  $I_e$  para la losa,  $I_{e,avg} = 0.7I_{e,m} + 0.15I_{e1} + 0.15I_{e2}$  se obtiene 340 in<sup>4</sup>/ft (46,430 cm<sup>4</sup>/m) para  $I_{e,D}$  y 124.4 in<sup>4</sup>/ft (16,990 cm<sup>4</sup>/m) para  $I_{e,D+L}$ . El correspondiente cálculo de la deflexión inmediata para la sobrecarga (sin precarga) resulta en  $\Delta_{i,L} = 0.384 - 0.100 = 0.284 \text{ in.}$  (0.721 cm) (un 10% de incremento de la deflexión respecto del valor de 0.259 in (0.658 cm) obtenido con el valor de  $I_e$  en el centro del vano).

### Deflexión incremental (con precarga)

La losa trabaja fisurada tanto en el centro del vano como en los apoyos para los momentos flectores debidos al peso propio más la sobrecarga, resultando en  $I_e = 140.4 \text{ in}^4/\text{ft}$  (19,120 cm<sup>4</sup>/m) en el centro del vano y  $I_e = 87.0 \text{ in}^4/\text{ft}$  (11,880 cm<sup>4</sup>/m) en los apoyos. Considerando  $I_{e,D+L} = I_{e,m} = 140 \text{ in}^4/\text{ft}$  (19,120 cm<sup>4</sup>/m) y asumiendo precarga se obtiene

$$\Delta_{i,D} = K \frac{5}{48} \frac{M_D \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{2.74 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.243 \text{ in.} \quad (0.864 \text{ cm})$$

$$\Delta_{i,L} = K \frac{5}{48} \frac{M_L \ell_n^2}{E_c I_{e,D+L}} = 0.80 \times \frac{5}{48} \times \frac{1.09 \times 12 \times (224)^2}{4030 \times 140.4} = 0.097 \text{ in.} \quad (0.246 \text{ cm})$$

$$\text{o también, } \Delta_{i,L} = \Delta_{i,D+L} - \Delta_{i,D} = 0.340 - 0.243 = 0.097 \text{ in.} \quad (0.246 \text{ cm})$$

El valor de  $\Delta_{i,D}$  con precarga es tres veces el valor de la deflexión calculada para la carga por primera vez (incrementándose desde 0.081 in (0.206 cm) sin precarga hasta 0.243 in (0.617 cm) con precarga cuando se utiliza el valor de  $I_e$  en el centro del vano). Inversamente,  $\Delta_{i,L}$  con precarga es apenas mayor que un tercio del valor calculado sin precarga (disminuyendo de 0.259 in (0.658 cm) sin precarga hasta 0.097 in (0.246 cm) cuando se utiliza el valor de  $I_e$  en el centro del vano). Considerando un 20% de la sobrecarga como carga sostenida se obtiene

$$\Delta_{i,sus} = \Delta_{i,D} + 0.2\Delta_{i,L} = 0.243 + 0.2 \times 0.097 = 0.2624 \text{ in.} \quad (0.666 \text{ cm})$$

$$\text{y}$$

$$\Delta_{inc} = \lambda_{\Delta} \Delta_{i,sus} + \Delta_{i,L} = 2.0 \times 0.2624 + 0.097 = 0.622 \text{ in.} \leq$$

$$\frac{\ell}{240} = \frac{240}{240} = 1.0 \text{ in.} \quad (2.54 \text{ cm}) \text{ y por lo tanto verifica.}$$

Se puede comparar este resultado con el valor de  $\Delta_{inc} = 0.525 \text{ in.}$  (1.334 cm) cuando no hay precarga.

Considerando  $I_{e,D+} = I_{e,avg} = 124.4 \text{ in}^4/\text{ft}$  (16,990  $\text{cm}^4/\text{m}$ ) y asumiendo precarga se obtiene  $\Delta_{inc} = 2.0 \times 0.296 + 0.110 = 0.702 \text{ in}$  (1.783  $\text{cm}$ ) (un 13 % de incremento de las deflexiones pero que todavía satisface el límite de  $\ell/240$ ).

## Escenario alternativo para el peso propio

Un escenario alternativo (y quizás más realista) para las deflexiones originadas por el peso propio considera los momentos generados por una carga uniformemente distribuida actuando sobre todos los vanos. Se evalúan a continuación las diferencias resultantes en relación con la influencia de los momentos en el centro del vano y en los apoyos considerados para los cálculos en las deflexiones debidas al peso propio.

Considerando para los momentos en los apoyos de un vano interno que la losa está completamente empotrada en cada extremo, el momento negativo en el apoyo resulta  $M_D = w\ell_n^2/12 = 3.65 \text{ kip}\cdot\text{ft}/\text{ft}$  (16.2  $\text{kN}$ ), el momento positivo en el centro del vano  $M_D = w\ell_n^2/24 = 1.83 \text{ kip}\cdot\text{ft}/\text{ft}$  (8.14  $\text{kN}$ ) y el coeficiente de deflexión  $K = 0.60$ . La losa está fisurada en los apoyos con  $(2/3)M_{cr}/M_D$  igual a 0.907 y el valor correspondiente de  $I_e = 205.3 \text{ in}^4/\text{ft}/\text{ft}$  (28,040  $\text{cm}^4/\text{m}$ ) mientras que la losa en el centro del vano está no fisurada con  $I_e = 421.9 \text{ in}^4/\text{ft}$  (57,610  $\text{cm}^4/\text{m}$ ). Los momentos flectores y los correspondientes valores de  $I_e$  para el peso propio más la sobrecarga no cambian.

Las deflexiones calculadas se resumen en la Tabla 4 para este escenario, dando  $\Delta_{i,l} = 0.300 \text{ in}$  (0.762  $\text{cm}$ ) sin precarga (cuando se usa  $I_{e,m}$ ) y  $\Delta_{inc} = 0.550 \text{ in}$  (1.397  $\text{cm}$ ) con precarga (cuando se usa  $I_{e,m}$ ). Una comparación con la Tabla 3 muestra que las deflexiones debidas al peso propio se reducen un 50% (con o sin precarga), lo que origina un incremento de las deflexiones debidas a las sobrecargas del 16% para el peor caso sin precarga y de más del doble de la deflexión debida a la sobrecarga cuando se considera una precarga. Las deflexiones inmediatas adicionales debidas a la sobrecarga sin precarga siguen dando deflexiones mayores que el valor con precarga. Las deflexiones incrementales disminuyen un 12% con precarga y un 5% sin precarga. Usar la longitud entre centros de apoyo para el cálculo de deflexiones (en lugar de la luz libre) incrementaría las deflexiones en un 15% en este ejemplo.

## Resumen

Los valores calculados de las deflexiones inmediatas debidas a la sobrecarga (sin precarga) alcanzaron el 40% del límite reglamentario de deflexiones  $\ell/360$  para este ejemplo, mientras que la deflexión incremental (con precarga) alcanza entre el 62 y el 70% del límite correspondiente de  $\ell/240$ , dependiendo si se toma para  $I_e$  el valor en centro de la luz o un promedio. Las deflexiones calculadas se incrementan entre un 10 y un 14% cuando se utiliza el promedio ponderado para  $I_e$  respecto de utilizar para  $I_e$  el valor del centro del vano. Utilizar un promedio ponderado para  $I_e$  predice una respuesta más flexible (con deflexiones mayores) cuando  $I_e$  en el centro del tramo es mayor que  $I_e$  en los apoyos, como ocurre en este ejemplo.

Los resultados del escenario alternativo considerando los momentos flectores del peso propio uniformemente distribuido actuando sobre todos los tramos demuestra el efecto considerable que las hipótesis sobre los momentos en una estructura continua (estáticamente indeterminada) tienen sobre el cálculo de las deflexiones. Las deflexiones inmediatas debidas a la sobrecarga (sin precarga) se incrementan un 16% mientras que las deflexiones incrementales (con precarga) disminuyen un 12%. Por lo tanto, las hipótesis realizadas en este ejemplo sobre los momentos en los apoyos y en el centro del tramo para las cargas de peso propio afectan los valores calculados de las deflexiones debidas a la sobrecarga y de las deflexiones incrementales en alrededor de  $\pm 15\%$ .

## Referencias

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-19)," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2019, 624 pp.
2. Bischoff, P.H., "Computing Deflections Using ACI CODE-318-19 and Beyond, Part 1," Concrete International, V. 47, No. 2, Feb. 2025, pp. 47-50
3. ACI Committee 435, "Report on Deflection of Nonprestressed Concrete Structures (ACI PRC-435-20)," American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2020, 56 pp.

Seleccionado por los editores de interés del lector.

**Peter H. Bischoff**, FACI, es Profesor Investigador Honorario en el Departamento de Ingeniería Civil en la Universidad de New Brunswick, Fredericton, NB, Canadá. Es miembro de los Comités ACI 224 de fisuración, ACI 435 de deflexiones de estructuras de concreto, ACI 440 de refuerzo con fibras de polímeros y del ACI 440C Código de Concreto Reforzado FRP. Recibió en 2014 el "ACI Design Award" y en 2020 el "ASCE T.Y. Lin Award" por el artículo publicado en el ACI Structural Journal relacionado a la deflexión de miembros de concreto pretensado. Sus intereses en investigación incluyen el comportamiento en servicio de estructuras de concreto.



Título original en inglés:  
**Computing Deflections  
Using ACI CODE-318-19  
and Beyond, Part 4**

**La traducción de este artículo  
correspondió al Capítulo Argentina**



*Traductor y  
Revisor Técnico:*  
**Dr. Ing. Raul  
Bertero**